Seminar Algorithmische Geometrie
Leitung: Dr. Dahlhaus
Referent: Martin Löhnertz

Voronoidiagramm und Delaunytriangulierung

1. Allgemeine Eigenschaften von Voronoidiagramm und Delaunytriangulierung

   - Zu einer gegebenen Metrik und einer Menge von Objekten (Sites) bezeichnet das Voronoidiagramm die Menge von Punkten, die die Regionen mit jeweils verschiedenen "nächstgelegenen" Objekten begrenzen.
   - Im Fall der euklidischen Metrik und von Punktsites handelt es sich um einen planaren, sogar konvexen Graphen mit $\mathcal{O}(n)$ Knoten und Kanten.
   - Als Knoten sieht man dabei diejenigen Punkte an, die auf dem Berührungspunkt mindestens dreier Regionen liegen. Befinden sich die Sites nicht in allgemeiner Lage, d.h. liegen 4 davon auf einem leeren Kreis, so können sich auch mehr als 3 Regionen in einem Knoten berühren.
   - Zu je zwei benachbarten Regionen existiert ein Kreis, der die beiden Sites berührt und im Inneren keine weitere enthält.
   - Die Delaunytriangulation ist der duale Graph zu diesem Graphen.
   - DT ist die Triangulation mit der größten Winkelfolge.
   - Der minimale Spannbaum ist Teilgraph der DT.

2. Das Sweepline Paradigma

   - Übertragung eines Problemes in n Dimensionen in ein $n-1$ dimensionales, indem eine Koordinate in eine Zeitachse umgewandelt wird.
   - Ereignisgesteuerte Simulation der Bewegung einer $n-1$ dimensionalen Hyperebene durch den Gesamtraum
   - Häufig behält man einige der besuchten Punkte "einige Zeit im Gedächtnis", niemals aber alle.

3. Die Transformation $\star$
   Sei $d(z)$ die Entfernung zur nächstgelegenen Site. $d_p(z)$ die zur Site p.

   - $\star((x,y)) := (x, y + d((x,y)))$ $\star_p((x,y)) := (x, y + d_p((x,y)))$
   - $\star$ und $\star_p$ sind auf der Voronoi-Region von p identisch.
   - $\star_p$ bildet nicht senkrechte Graden auf Hyperbeln und senkrechte Graden auf Strahlen ab.
   - unter $\star$ wird jede Site zu dem Punkt ihrer Region mit der kleinsten y-Koordinate und in jeden Schnittpunkt führen von unten mindestens zwei Kanten.
   - $\star$ ist auf VD eineindeutig und die Identität auf Sites.

4. Ein Sweepline-Algorithmus zur Bestimmung des Voronoidiagrammes

   - Zur jeweiligen Position der Sweepline, die sich von den kleinen zu den großen y-Koordinaten bewegt, speichert man die jeweils geschnittenen Regionen von $\star(VD)$ zusammen mit den trennenden Kanten.
   - Die Prioritätswarteschlange der noch ausstehenden Ereignisse enthält alle noch nicht besuchten Sites, sowie alle Schnittpunkte von benachbarten Kanten in der Regionenliste.
   - Beide Strukturen können sichr nur an Sites und Schnittpunkten ändern.
   - der Algorithmus verschiebt die Sweepline also immer bis zum nächsten "Ereignis" und korrigiert dort die Daten entsprechend.
   - Schnittpunkte von trennenden Kanten können als Knoten des VD ausgegeben werden, bzw. implizieren ein Dreieck der DT.
   - Der Algorithmus berechnet $\star(VD)$, kann aber in einem VD und DT ausgeben, bzw. VD zum Berechnen von $\star(VD)$ heranziehen.
   - Die Laufzeit ist $\mathcal{O}(n \log n)$ und somit asymptotisch optimal. Der logarithmische Faktor kommt durch die Priority-Queue und das Suchen in der Regionenliste zustande.

5. Verallgemeinerungen

   (a) Linien-Sites

   - das Problem der Liniensegmente wird vereinfacht, indem man Segmente und Endpunkte getrennt betrachtet. Die Bisektoren sind dann Parabalstücke und Liniensegmente.
   - Es kann die gleiche Transformation angewandt werden, es werden allerdings ganze Gebiete unter horizontalen Linien-Sites mit der Linie identifiziert.
   - Due Fälle, in denen sich mehrere Bisektoren in einem Punkt treffen, müssen gesondert betrachtet werden.

   (b) gewichtete Punkt-Sites

   - Zu jedem Abstand wird ein von der Site abhäniger Wert w_q addiert.
   - Die Transformation wird durch $\star((x, y)) := (x, y + d((x, y)) + w_s)$ ersetzt, wobei w_s die nächstgelegene Site ist.
   - Sites werden gemäß ihres w nach oben verschoben.
   - Eine Site kann ihr Gebiet vollkomen an andere Sites verlieren. Dies muß überprüft werden.
   - Bisektoren und transformierte Bisektoren sind Hyperbeln. Die Schnittpunkte können berechnet werden.
   - Die Bilder der Sites sind die untersten Punkte der transformierten Regionen und in jeden Schnittpunkt führen von unten zwei Kanten.

6. Literatur

- Fortune, S.: A Sweepline Algorithm for Voroni Diagrams; Algorithmica 2,1987
- Klein, Rolf: Algorithmische Geometrie ; Bonn: Addison-Wesley 1997